

Г. А. Клековкин

### Использование интерактивной математической системы GeoGebra при обучении дифференциальной геометрии. Параметризованные поверхности

Автор продолжает исследование инструментов интерактивной математической системы GeoGebra, которые могут быть востребованы при обучении дифференциальной геометрии будущих учителей математики. На основании проведенного анализа выделяются возможные направления внедрения этой системы в учебный процесс при изучении поверхностей и их свойств. Статья адресована преподавателям курса геометрии.

**Ключевые слова:** интерактивная математическая система GeoGebra, дифференциальная геометрия, параметризованная поверхность, обучение геометрии.

Создание современной и безопасной цифровой образовательной среды, обеспечивающей высокое качество и доступность образования всех видов и уровней, является одной из ведущих и наиболее масштабных целей национального проекта «Образование». Специфика предстоящей цифровизации образования в предметной области «Математика» во многом будет обусловлена наличием программных средств визуализации математических объектов и автоматизации численных и символьных вычислений. Поэтому будущие учителя математики в период вузовского обучения должны получить широкие представления об этих инструментах математической деятельности (прежде всего, об интерактивных математических системах (ИМС) и системах компьютерной математики общего назначения) и приобрести навыки их практического использования при решении математических задач из различных разделов математики. Особое место в «инструментальной» подготовке студентов требуется отвести изучению и использованию интерактивных математических систем, специально созданных для электронного сопровождения процесса обучения математике в средней школе.

В работе [11], непосредственным продолжением которой является данная статья, отмечается, что в действительности функциональные и инструментальные возможности ИМС далеко выходят за рамки школьных курсов математики. Это позволяет применять интерактивные математические системы в преподавании большинства вузовских математических курсов. В предыдущей статье это утверждение было продемонстрировано на примере использования системы GeoGebra при изучении теории кривых в курсе дифференциальной геометрии. В настоящей статье предполагается исследовать возможности инструментов этой системы, которые могут оказаться востребованными при изучении теории поверхностей, и на основании этого выделить перспективные направления ее внедрения в учебный процесс.

**1. Задание и изображение поверхности.** Пусть  $Oxuz$  — прямоугольная декартова система координат. Как отмечается в [11], в интерактивной математической системе GeoGebra неявными уравнениями

$$F(x, y, z) = 0$$

© Клековкин Г. А., 2020

можно задавать только плоскости и поверхности второго порядка. Если попытаться ввести какое-либо уравнение, отличное от алгебраического уравнения не выше второй степени, то на *Панели объектов* появится обозначение объекта с надписью *не определено*.

В дифференциальной геометрии, где изучаются произвольные достаточно гладкие поверхности, обычно используется их параметрическое представление. Именно, поверхность  $F$  задают параметрическими уравнениями:

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \quad (1)$$

где функции  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  и  $z(u, v)$  определены и дифференцируемы в некоторой двумерной области  $D$ . Точка  $(u_0, v_0) \in D$  однозначно определяет точку  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in F$ , поэтому параметры  $u_0, v_0$  называют криволинейными координатами точки  $M_0$  на поверхности  $F$ . Параметрические уравнения (1) равносильны векторному уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v).$$

Если в уравнениях (1) положить  $v = v_0 = \text{const}$ , то получим параметрические уравнения

$$x = x(u, v_0), y = y(u, v_0), z = z(u, v_0)$$

линии, которая определяется параметром  $u$  и лежит на поверхности  $F$ . Эту линию так и называют линия  $v = \text{const}$  либо линия  $u$ . Аналогично определяются линии  $u = \text{const}$ , или линии  $v$ . Линии  $u$  и линии  $v$  называют также координатными линиями. Через каждую обыкновенную точку поверхности проходит единственная линия  $u$  и единственная линия  $v$ .

Для ввода и изображения поверхности, заданной параметрически, в GeoGebra предназначена команда *Поверхность* (<Выражение>, <Выражение>, <Выражение>, <Параметр 1>, <Начальное значение>, <Конечное значение>, <Параметр 2>, <Начальное значение>, <Конечное значение>), расположенная в окне 3D каталога *Математические операции*.

Наиболее известными криволинейными координатами являются географические координаты на сфере. Поэтому в качестве первого примера рассмотрим построение изображения сферы, параметризованной с помощью географических координат:

$$x = 3 \cos u \cos v, y = 3 \sin u \cos v, z = 3 \sin v,$$

где долгота  $0 \leq u < 2\pi$  и широта  $-\pi \leq v \leq \pi$  (радиус сферы  $a = 3$ ).

После вызова команды *Поверхность* и внесения параметрических уравнений в строку *Ввод*, как обычно, одновременно нажимаются клавиши *Ctrl* и *Enter*. В результате исполнения команды на *Панели объектов* появляются набранные уравнения, а на *Полотне 3D* — соответствующее изображение сферы (рис. 1). Для большей наглядности на рисунке обозначены полюса сферы  $N(0,0,3)$ ,  $S(0,0,-3)$  и точки  $(3,0,0)$ ,  $(0,3,0)$  ее пересечения с положительными направлениями осей  $Ox$  и  $Oy$ . Точки заданы их координатами в строке ввода.

Кроме того, на рисунке задана произвольная точка  $M$  сферы и ее радиус-вектор  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ . Чтобы задать эти объекты, нужно сначала создать ползунки для параметров  $u$  и  $v$ , а затем задать координаты точки (радиус-вектора) в строке *Ввод*. При использовании для обозначения объекта прописной буквы задается точка, а при использовании строчной — вектор.

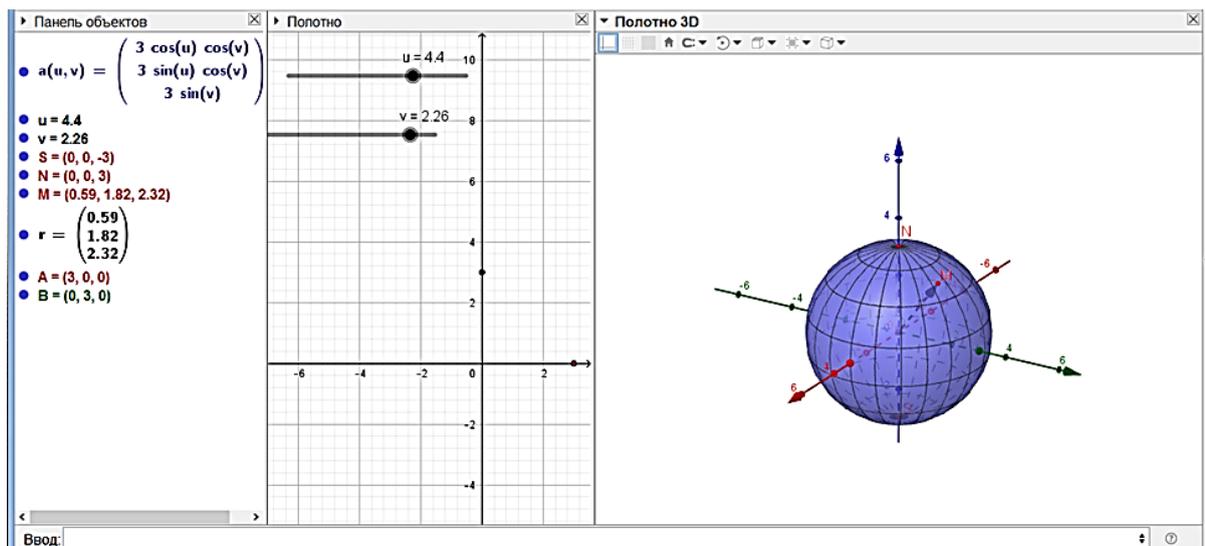


Рис. 1. Изображение сферы, заданной параметрическими уравнениями

На построенном в GeoGebra изображении сферы, как можно видеть, сразу нанесена координатная сеть, образованная линиями  $u$  и линиями  $v$ .

Для того чтобы на изображении сферы выделить некоторую линию  $u$ , необходимо при фиксированном значении параметра  $v$  анимировать параметр  $u$  (рис. 2,а), для выделения линии  $v$ , наоборот, фиксировать параметр  $u$  и анимировать параметр  $v$  (рис. 2,б).

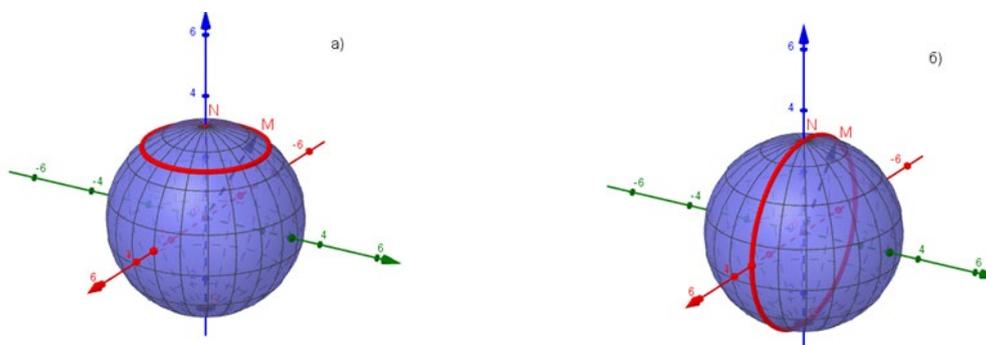


Рис. 2. Изображения координатных линий

Изображение параметризованной поверхности в соответствии с установленными правилами с помощью чертежных инструментов и даже выполнение схематического рисунка «вручную» является достаточно трудоемким процессом и, как правило, требует больших временных затрат. Рассмотренная команда позволяет полностью автоматизировать процесс создания изображений поверхностей, заданных параметрическими уравнениями. Это, как будет видно по ходу дальнейшего изложения, открывает широкие возможности для визуализации самых различных видов поверхностей, традиционно рассматриваемых в курсах дифференциальной геометрии.

Для демонстрации понятий, изучаемых в теории поверхностей, обычно широко используются хорошо знакомые студентам поверхности второго порядка. На рисунке 3 показаны изображения этих поверхностей, полученные с помощью наиболее известных их параметрических представлений.

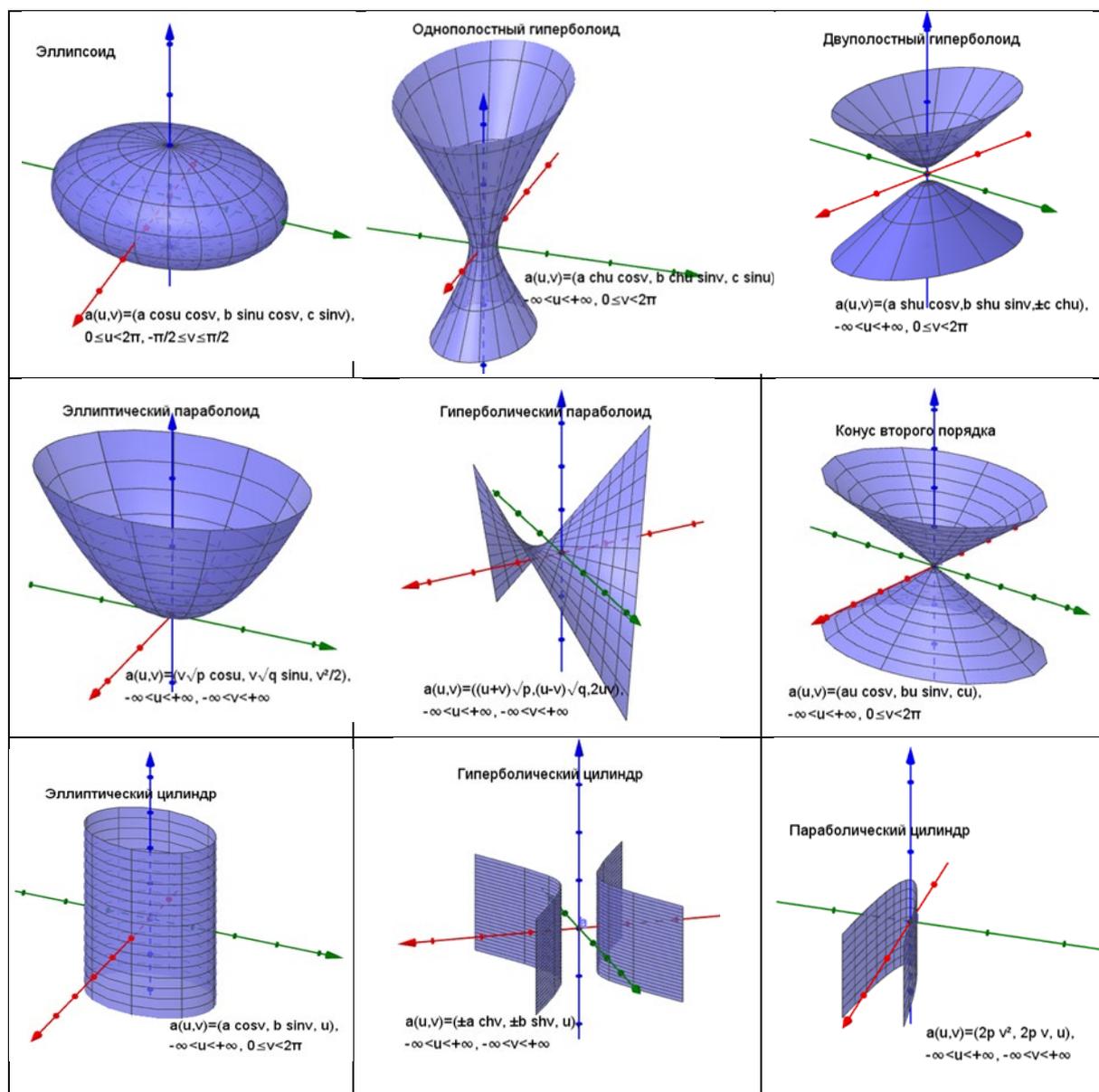


Рис. 3. Изображения поверхностей второго порядка, заданных с помощью параметрических уравнений

Разумеется, не любая параметризация позволяет получать такие наглядные представления о форме поверхности и соответствующих координатных линиях. Так, для изображения однополостного гиперboloида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  на рисунке 3 использована параметризация

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v, y = b \operatorname{ch} u \sin v, z = c \operatorname{sh} u,$$

где  $-\infty < u < +\infty, 0 \leq v < 2\pi$ . Линиями  $u = \operatorname{const}$  в этой параметризации являются гиперболы, которые получаются в сечении гиперboloида плоскостями, проходящими через ось  $Oz$ , а линиями  $v = \operatorname{const}$  — эллипсы, лежащие в плоскостях, параллельных координатной плоскости  $Oxy$ . Поэтому изобразить «кусок» однополостного гиперboloида,

дающий представление о его форме, достаточно просто. При решении некоторых задач гораздо удобнее использовать другую известную параметризацию однополостного гиперболоида:

$$x = a \frac{uv+1}{u+v}, y = b \frac{v-u}{u+v}, z = c \frac{uv-1}{u+v}.$$

Здесь  $-\infty < u < +\infty$ ,  $-\infty < v < +\infty$ , а координатная сеть образована двумя семействами прямолинейных образующих гиперболоида. Поэтому «замести» прямолинейными образующими весь гиперболоид не удастся (рис. 4).

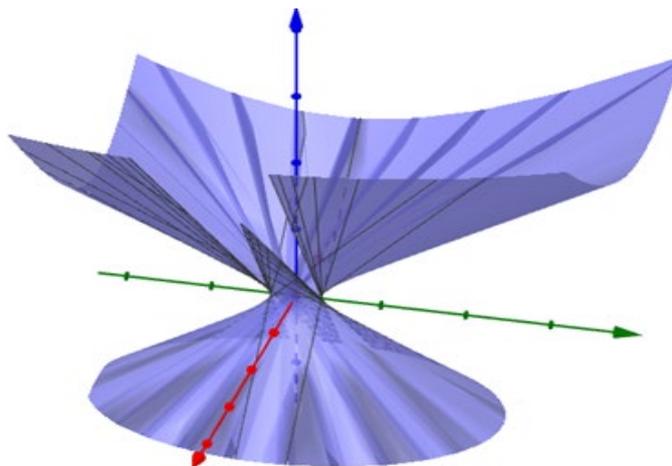


Рис. 4. Изображение однополостного гиперболоида

Во многих случаях графические инструменты GeoGebra позволяют с помощью динамических чертежей наглядно демонстрировать процесс образования конструктивно определяемых поверхностей. Приведем несколько примеров подобных демонстраций.

В качестве первого примера рассмотрим образование поверхностей переноса. *Поверхностью переноса* называется поверхность, описываемая кривой  $\gamma_1$ , которая непрерывно перемещается в пространстве, оставаясь параллельной самой себе. Кривую  $\gamma_1$  называют при этом производящей (образующей) кривой поверхности переноса.

Поверхность переноса может быть замечена любой производящей кривой, которая при параллельном перенесении опирается некоторой своей точкой  $M$  на любую другую кривую  $\gamma_2$ , называемую направляющей. Подобным образом можно, например, образовывать эллиптический и гиперболический параболоиды, если вершину одной параболы (производящей) разместить на другой параболе (направляющей), расположенной в плоскости, перпендикулярной плоскости производящей параболы. Другим видом хорошо известных поверхностей переноса являются цилиндры.

Пусть производящая и направляющая кривые поверхности переноса заданы соответственно параметрическими векторными уравнениями

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(u), \vec{r}_2 = \vec{r}_2(v).$$

Тогда параметрические уравнения определяемой ими поверхности переноса запишутся в виде:

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}_1(u) + \vec{r}_2(v). \quad (2)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения зависит только от  $u$ , а второе — только от  $v$ . Поэтому в силу коммутативности сложения векторов можно, наоборот, вторую кривую считать производящей, а первую — направляющей.

На рисунке 5 изображена поверхность переноса

$$\vec{a}(u, v) = (u + v, u - v, chu - \frac{1}{2}v^2) = (u, u, chu) + (v, -v, \frac{1}{2}v^2),$$

определяемая графиком гиперболического косинуса, лежащим в плоскости  $x - y = 0$ , и параболой, лежащей в плоскости  $x + y = 0$ .

Поверхность переноса на рисунке 5 построена с помощью команды *Поверхность*. Одновременно с этим выполненный чертеж включает динамический компонент, демонстрирующий способ построения точек поверхности переноса, предложенный С. Ли [9]. Суть этого способа состоит в том, что сначала строятся опорные кривые  $\vec{R}_1 = 2\vec{r}_1(u)$  и  $\vec{R}_2 = 2\vec{r}_2(v)$ . Затем на первой кривой строится произвольная точка  $K(u)$ , а на второй — произвольная точка  $L(v)$ . Тогда середина  $M$  отрезка  $KL$  имеет радиус-вектор  $\vec{r}(u, v) = \vec{r}_1(u) + \vec{r}_2(v)$  и, значит, принадлежит поверхности переноса (2).

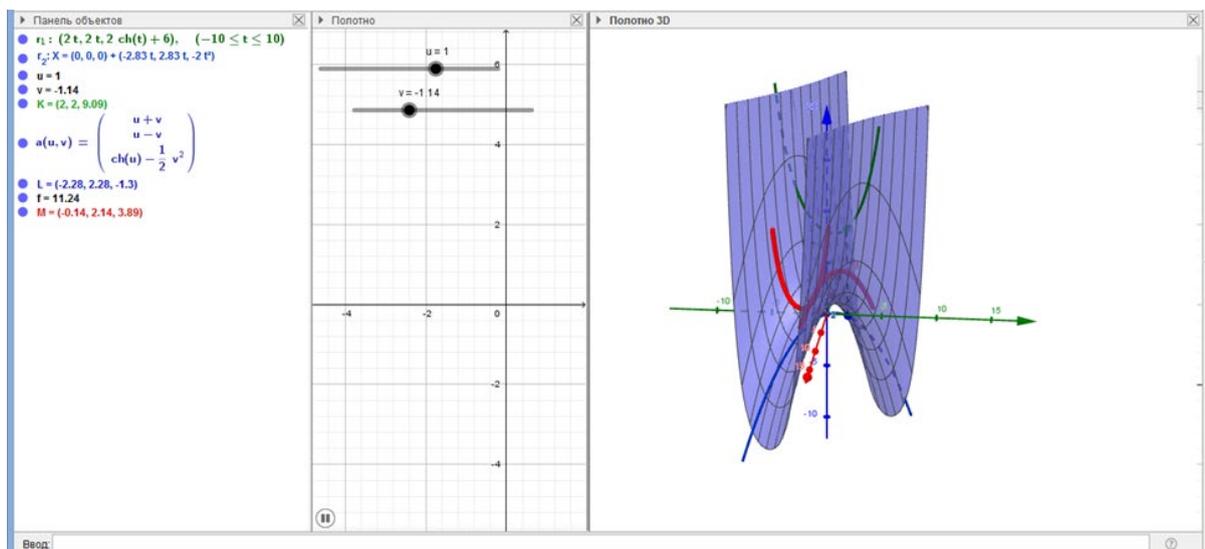


Рис. 5. Изображение поверхности переноса

На рисунке первая опорная кривая выделена зеленым цветом, а вторая — синим, для изображения точек  $K$  и  $L$  использованы ползунки  $u$  и  $v$  соответственно. Середина  $M$  отрезка  $KL$  построена с помощью команды *Середина или центр* из окна *Точка* на панели инструментов, окрашена красным цветом и у нее активирована опция *Оставлять след*. Если теперь с помощью ползунков фиксировать параметр  $v$  и анимировать параметр  $u$ , то точка  $M$  будет вычерчивать координатную линию  $u$ . Если, наоборот, фиксировать  $u$  и анимировать  $v$ , то точка  $M$  будет вычерчивать линию  $v$  (красные линии на рис. 5).

Особенно просто в среде GeoGebra создавать динамические чертежи, демонстрирующие процесс образования развертывающихся линейчатых поверхностей. Существует три вида таких поверхностей: *цилиндрические*, *конические* и *поверхности касательных* [12; 13]. Все три вида поверхностей описываются движением образующей прямой, связанной с некоторой пространственной кривой, называемой направляющей. Цилиндриче-

ские поверхности описываются прямой постоянного направления, конические — прямой, проходящей через неподвижную точку, а поверхности касательных — касательными к некоторой пространственной кривой.

На рисунках 6,б и 6,в показаны изображения эллиптического цилиндра и конуса второго порядка, полученные путем анимации их образующих. В качестве направляющей обеих поверхностей выбран эллипс, лежащий в плоскости  $Oxy$  и имеющий в системе координат  $Oxy$  уравнение  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$  (рис. 6,а).

Для создания динамического чертежа, демонстрирующего процесс образования поверхностей, на эллипсе выбрана точка  $M = (5 \cos t, 4 \sin t, 0)$ , заданная с помощью параметра  $t$ .

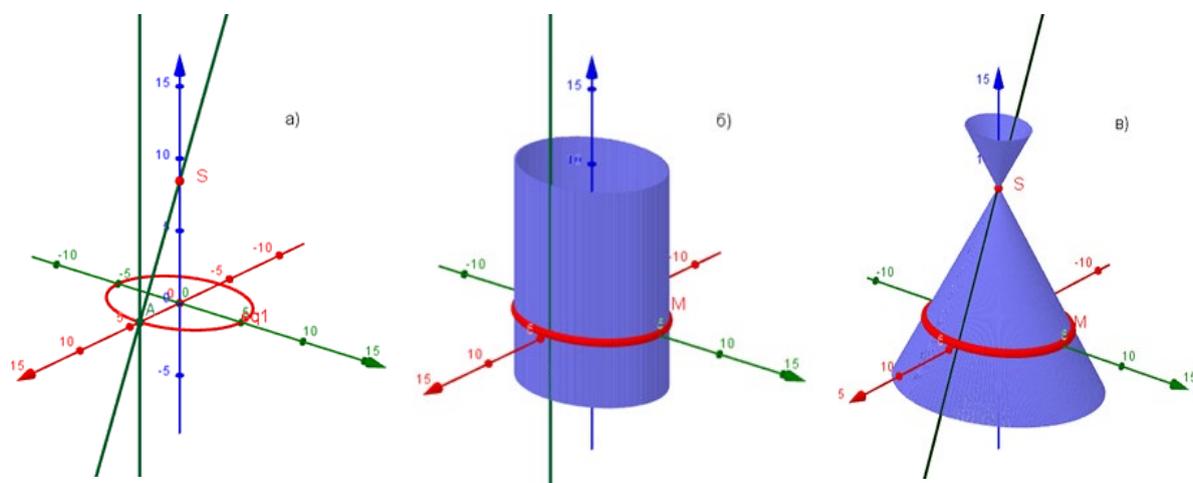


Рис. 6. Изображения эллиптического цилиндра и конуса второго порядка

Для образования цилиндра через точку  $M$  проведена прямая, параллельная оси  $Oz$ , а для образования конуса — прямая, проходящая через точку  $M$  и некоторую точку  $S$ , лежащую на оси  $Oz$ . После этого активированы опции *Оставить след* у точки  $M$  и указанных прямых. Теперь после анимации параметра  $t$  точка  $M$  будет пробегать направляющую, а прямые — заметать соответствующие поверхности. (Для наглядности на образующей прямой задан отрезок, а сама образующая сделана невидимой.) Недостатком итоговых изображений, полученных описанным способом, является то, что на них остается только видимая часть направляющей.

В качестве третьего примера рассмотрим создание динамического чертежа поверхности, образованной касательными к цилиндрической винтовой линии  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  при  $a = 1, b = 1$  (рис. 7,а).

Для получения изображения куска этой поверхности была задана касательная  $l$  кривой в ее текущей точке  $M$  с помощью команды *Касательная*, затем активированы опции *Оставить след* у точки  $M$  и прямой  $l$  и анимирован параметр, с помощью которого задана точка  $M$ .

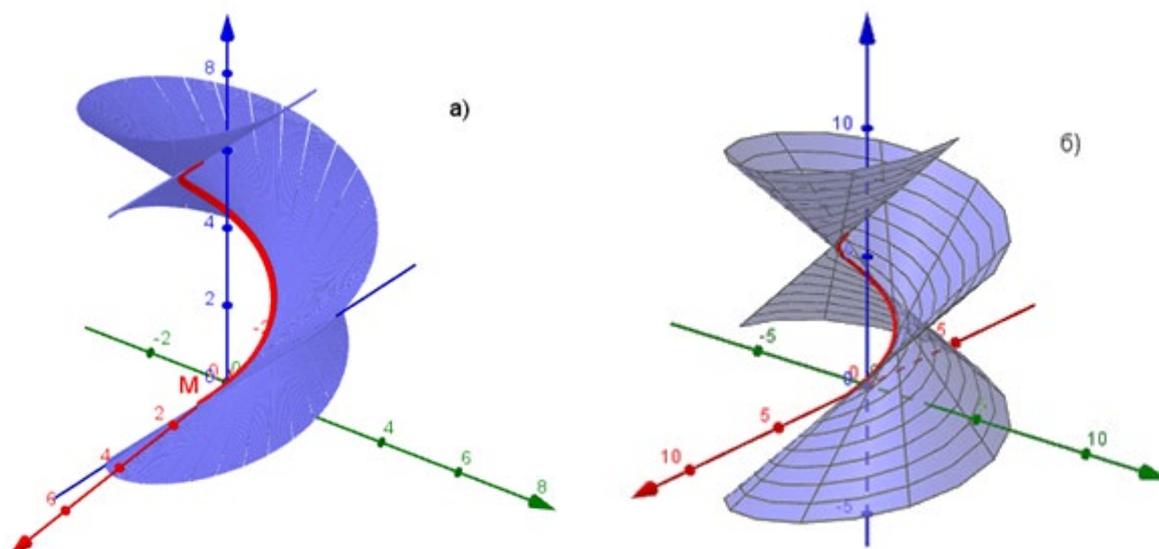


Рис. 7. Изображение поверхности касательных цилиндрической винтовой линии

В общем случае уравнение поверхности касательных кривой  $\vec{r} = \vec{r}(u)$  имеет вид  $\vec{a}(u, v) = \vec{r}(u) + v\vec{r}'(u)$  [12]. Для винтовой линии  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$  оно запишется следующим образом:

$$\vec{a}(u, v) = (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, u + v).$$

Изображение поверхности по этому уравнению с помощью команды *Поверхность* показано на рисунке 7,б.

Показательно, что по итоговому изображению поверхности, полученному с помощью динамической модели (рис. 7,а), составить наглядное представление о форме поверхности труднее, чем по изображению на рисунке 7,б. Однако этот недостаток полностью компенсируется при наблюдении самого процесса вычерчивания поверхности.

Похожим способом можно создавать динамические чертежи, демонстрирующие процесс образования *поверхностей вращения*. Например, поверхность вращения с осью  $Oz$  и профилем, имеющим в системе координат  $Oxz$  уравнение  $x = f(z)$ , можно построить следующим образом:

1. Создать ползунок для параметра  $t$ .
2. В строке ввода *Полотна 3D* задать в параметрическом виде текущую точку  $M$  профиля:  $M = (f(t), 0, t)$ .
3. В *Полотне 3D* построить окружность  $\omega$  по точке  $M$  и оси  $Oz$ .
4. Активировать опции *Оставлять след* у точки  $M$  и окружности  $\omega$ , анимировать параметр  $t$ . Теперь точка  $M$  будет «пробегать» профильную кривую, а окружность «заметать» соответствующую поверхность вращения.

На рисунке 8,а описанным способом построен динамический чертеж, на котором представлена поверхность вращения с осью  $Oz$ , профилем которой является дуга синусоиды, лежащей в координатной плоскости  $Oxz$  и имеющей в системе координат  $Oxz$  уравнение  $x = \sin z + 3$ .

Готовый (статичный) чертеж той же поверхности вращения, построенный с помощью команды *Поверхность*, показан на рисунке 8,б.

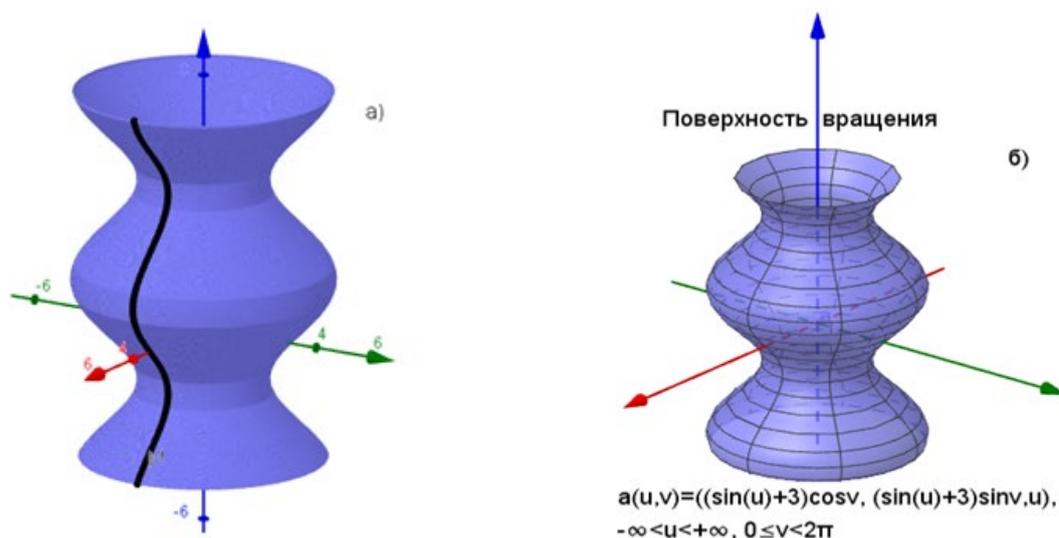


Рис. 8. Изображение поверхности вращения

В учебниках и задачниках по геометрии для будущих учителей математики и в специализированных задачниках по дифференциальной геометрии содержится достаточно большое количество задач и упражнений на исследование свойств различных поверхностей вращения и линий на этих поверхностях [1—5; 7; 12—14]. Кроме задач на исследование свойств поверхностей вращения второго порядка авторы обычно предлагают задачи на исследование псевдосферы, тора, катеноида, прямого и косоугольного геликоидов. В зависимости от рассматриваемых задач в среде GeoGebra можно строить наглядные изображения этих поверхностей как геометрически, так и аналитически. Изображения, созданные с применением команды *Поверхность*, приведены на рисунках 9.

Завершая разговор о создании динамических и статичных чертежей в среде GeoGebra, рассмотрим каналовые и трубчатые поверхности. *Каналовыми* поверхностями называются поверхности, образованные движением окружности переменного радиуса, при котором центр окружности перемещается по заданной кривой  $\gamma$ , а плоскость окружности остается перпендикулярной этой кривой, т.е. лежит в нормальной плоскости кривой. Кривую  $\gamma$  при этом называют *осевой линией*.

Если радиус перемещающейся окружности остается постоянным, то образованная подобным образом поверхность называется *трубчатой*.

В качестве примера рассмотрим создание динамического чертежа (динамической модели), демонстрирующего образование трубчатой поверхности, осевой линией которой является виток цилиндрической винтовой линии.

Представление о процессе создания этого чертежа дает рисунок 10.

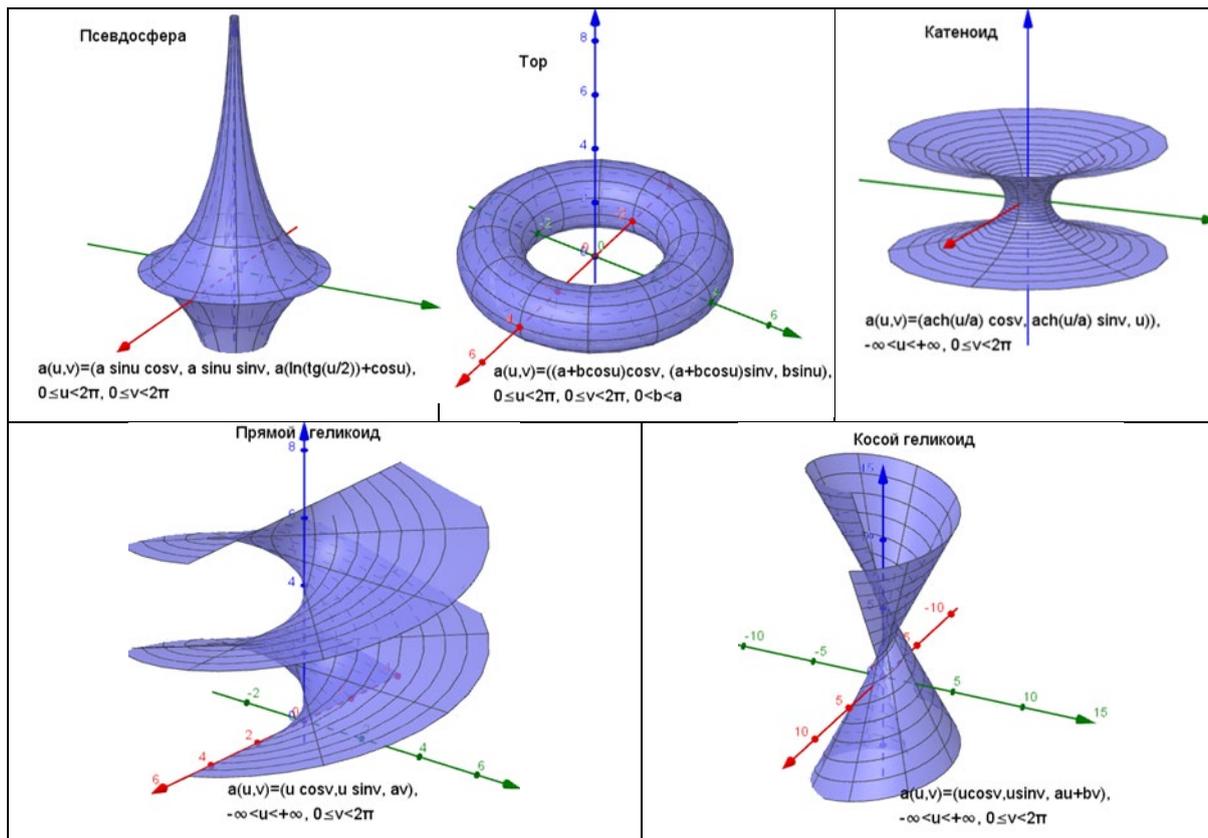


Рис. 9. Изображения псевдосферы, тора, катеноида, прямого и косого геликоидов

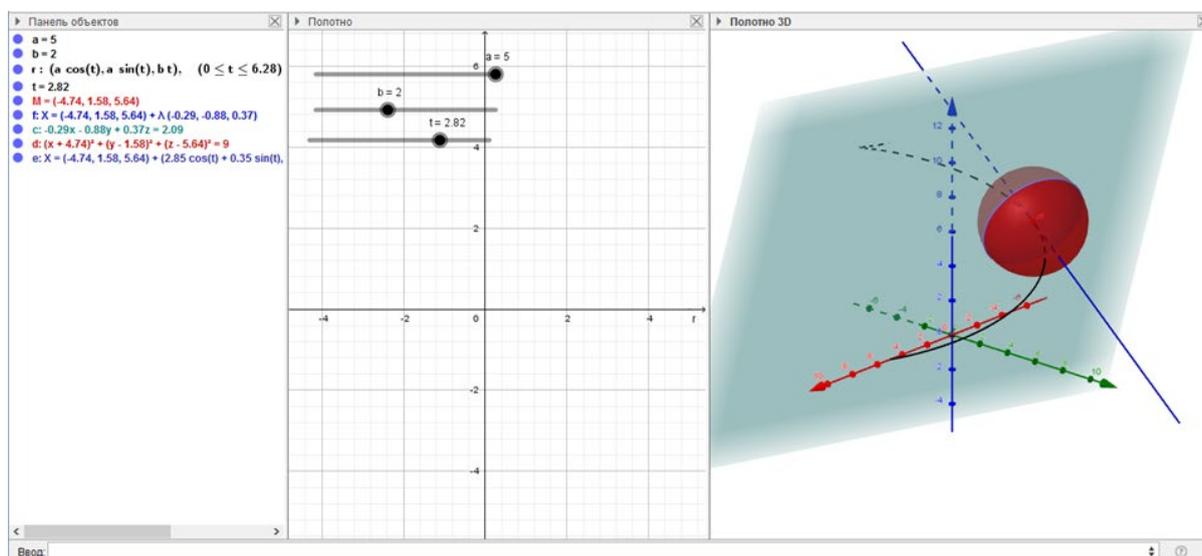


Рис. 10. Создание динамической модели трубчатой поверхности

Опишем этапы создания этого динамического чертежа.

1. Строим виток цилиндрической винтовой линии по ее параметрическим уравнениям  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ . При «сбрасывании» уравнений из строки ввода на *Панель объектов* на *Полотне 2D* появляются ползунки для  $a$  и  $b$ , а на *Полотне 3D* — изображение кривой. (При создании кривой выбрано  $a = 5$  и  $b = 2$ .)

2. Создаем ползунок для параметра текущей точки кривой.
3. Задаем текущую точку  $M$  кривой.
4. С помощью команды *Касательная* строим касательную винтовой линии в точке  $M$ .
5. Строим нормальную плоскость кривой в текущей точке  $M$ , используя для этого инструмент *Перпендикулярная плоскость* из окна *Плоскость* на панели инструментов.
6. С помощью команды *Сфера по центру и радиусу* на панели инструментов строим сферу с центром в точке  $M$  (на рисунке радиус  $r = 3$ ).
7. Выделяем окружность пересечения сферы и нормальной плоскости (команда *Кривая пересечения* на панели инструментов). Эта окружность будет образующей трубочатой поверхности. Сферу и нормальную плоскость делаем невидимыми.
8. Активируем опцию *Оставлять след* у точки  $M$  и окружности. После анимации параметра текущей точки кривой она будет пробегать эту кривую, а окружность описывать искомую трубочатую поверхность. Итоговое изображение представлено на рисунке 11,а.

Для построения трубочатой поверхности с помощью команды *Поверхность* нужно найти ее параметрические уравнения. В общем случае, если кривая  $\gamma$  задана параметрическим векторным уравнением  $\vec{r} = \vec{r}(u)$ , а радиус образующей окружности трубочатой поверхности равен  $c$ , то ее параметрические уравнения можно представить в виде

$$\vec{a}(u, v) = \vec{r}(u) + c(\vec{\beta} \cos v + \vec{\mu} \sin v),$$

где  $\vec{\mu}, \vec{\beta}$  — единичные векторы главной нормали и бинормали кривой  $\gamma$ ,  $v$  — угол между главной нормалью и радиусом окружности, проходящей через текущую точку поверхности [12; 13].

Проведя соответствующие вычисления, получим:

$$\vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b \sin u \vec{i} - b \cos u \vec{j} + a\vec{k}), \vec{\mu} = -\cos u \vec{i} - \sin u \vec{j},$$

$$\vec{a}(u, v) = \left( a \cos u + \frac{cb}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin u \cos v - c \cos u \sin v, \right. \\ \left. a \sin u - \frac{cb}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos u \cos v - c \sin u \sin v, bu - \frac{ca}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos v \right).$$

Изображение при  $a = 5, b = 2$  дано на рисунке 11,б.

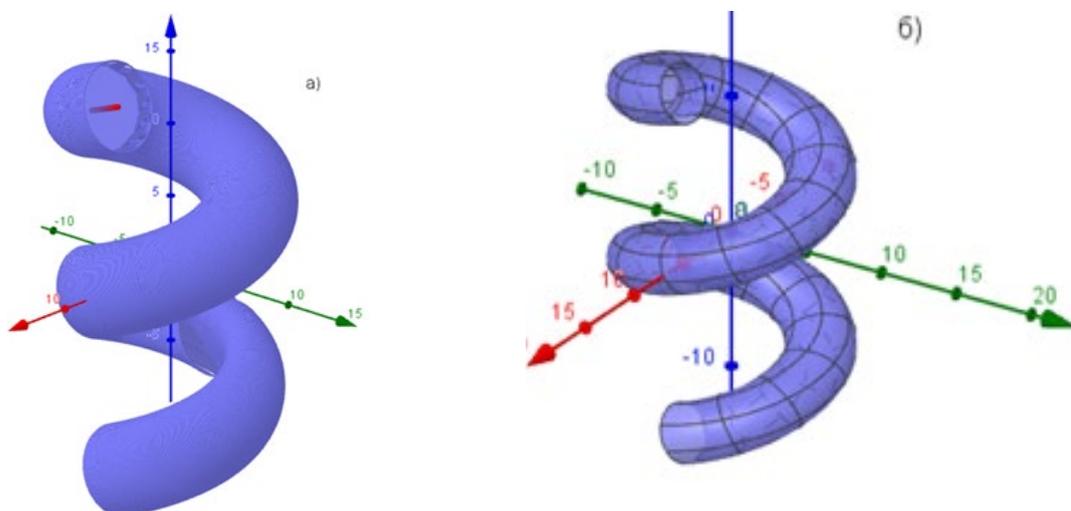


Рис. 11. Изображения трубочатой поверхности

На рисунках 12,а, 12,б показаны изображения каналовой поверхности, у которой осевой линией служит тот же виток цилиндрической винтовой линии, а радиус образующей окружности является линейной функцией параметра  $u$ .

Процесс создания динамического чертежа, демонстрирующего образование каналовой поверхности, отличается от описанного процесса создания динамического чертежа трубчатой поверхности только построением б. Теперь радиус сферы нужно задать как функцию параметра  $u$  (в рассмотренном случае  $c = u$ ). Так же точно для построения статического чертежа с помощью команды *Поверхность* в параметрических уравнениях трубчатой поверхности необходимо сделать аналогичную корректировку.

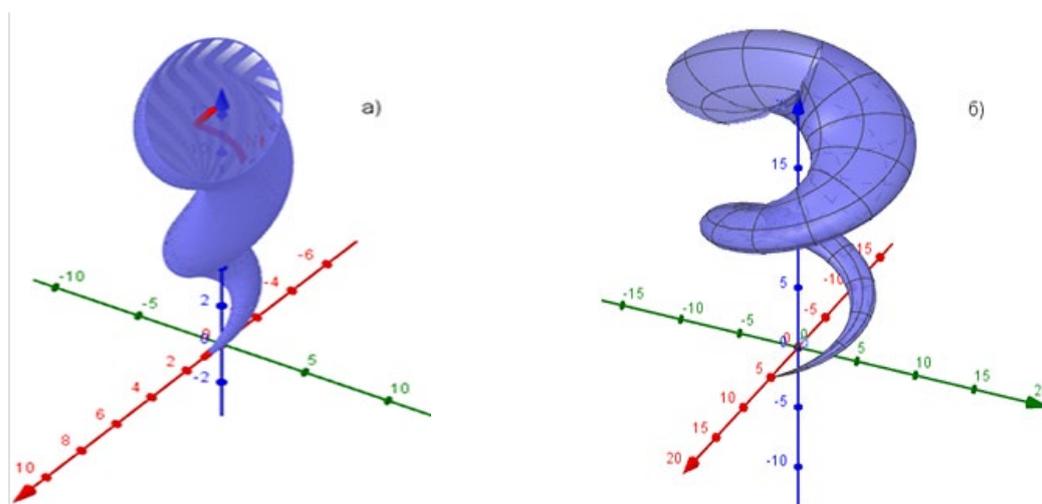


Рис. 12. Изображения каналовой поверхности

**2. Касательная плоскость и нормаль.** При изучении кривых, как показано в [11], можно весьма успешно использовать команду *Производная* из строки *Функции и исчисление* каталога *Математические операции*. При исследовании поверхностей возможности этой команды существенно сужаются. Дело в том, что команда *Производная* в GeoGebra предназначена только для работы с функциями от одной переменной. Однако в некоторых случаях применение этой команды можно сочетать с «ручными» вычислениями. Поясним сказанное примерами.

Рассмотрим изображение эллиптического параболоида

$$\vec{r}(u, v) = (3u \cos v, 2u \sin v, -u^2 + 5),$$

построенное с помощью команды *Поверхность* (рис. 13). Поставим задачу построить касательную плоскость и нормаль поверхности в ее произвольной точке  $M$ .

Чтобы построить точку  $M$ , создадим ползунки для  $u$  и  $v$ . В строке *Ввод* пишем обозначение точки  $M$  и набираем ее координаты:

$$M = (3u \cos v, 2u \sin v, -u^2 + 5).$$

После одновременного нажатия клавиш *Ctrl* и *Enter*, как видим на рисунке 13, на *Панели объектов* появилась запись  $M = (-1.65, 3.22, 2.11)$ , содержащая обозначение точки и ее текущие координаты. (Эти координаты соответствуют значениям параметров, установленных на ползунках:  $u = 1.7$ ,  $v = 1.9$ .) Одновременно с этим изображение точки  $M$  появляется на *Полотне 3D*.

Если в строку ввода внести запись

$$r = (3u \cos v, 2u \sin v, -u^2 + 5),$$

в которой объект обозначен строчной буквой и имеет те же координаты, что и точка  $M$ , то появятся радиус-вектор точки  $M$  и его изображение (рис. 13).

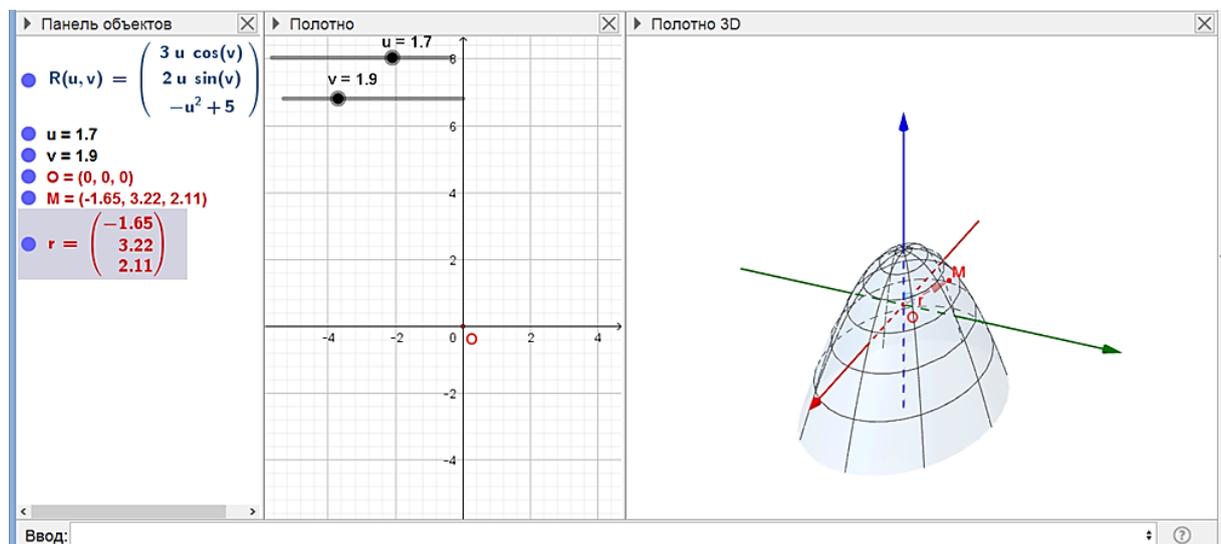


Рис. 13. Изображение текущей точки поверхности и ее радиус-вектора

Касательная плоскость поверхности параллельна векторам  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$ , которые теперь придется вычислять «с бумагой и ручкой»:

$$\vec{r}_u = (3 \cos v, 2 \sin v, -2u), \quad \vec{r}_v = (-3u \sin v, 2u \cos v, 0).$$

Пишем найденные векторы в строку *Ввод* и сбрасываем на *Панель объектов* и *Полотно 3D*. На *Панели объектов* появляются обозначения векторов и их текущие координаты, а на *Полотне 3D* — их изображения. Векторы при этом будут отложены от начала координат  $O$  (рис. 14).

В *Полотне 3D* на панели инструментов для построения плоскостей имеется команда *Плоскость через 3 точки*. Чтобы воспользоваться этой командой, отложим от точки  $M$  векторы  $\overrightarrow{MM'_1} = \vec{r}_u$  и  $\overrightarrow{MM'_2} = \vec{r}_v$ . Это можно сделать используя команду *Отложить вектор*, которая входит в меню окна *Прямая*. Точки  $M$ ,  $M'_1$  и  $M'_2$  принадлежат касательной плоскости. Плоскость строится с помощью команды *Плоскость через 3 точки* (рис. 14).

Для построения нормали поверхности в точке  $M$  можно применить расположенную на панели инструментов *Полотна 3D* команду *Перпендикулярная прямая*. (На рисунке 14 нормаль эллиптического параболоида в точке  $M$  выделена фиолетовым цветом.)

Если теперь у точки  $M$  активировать опцию *Оставлять след* и анимировать параметр  $v$ , то точка  $M$  вместе с «прикрепленными» к ней касательной плоскостью и нормалью будет перемещаться по линии  $u$ . На рисунке 15,а это линия  $u = 1,7$ , выделенная красным цветом. Если, наоборот, при фиксированном значении параметра  $v$  анимировать параметр  $u$ , то точка  $M$  вместе с касательной плоскостью и нормалью будет пробегать линию  $v$  (линия  $v = 1,9$  на рисунке 15,б).

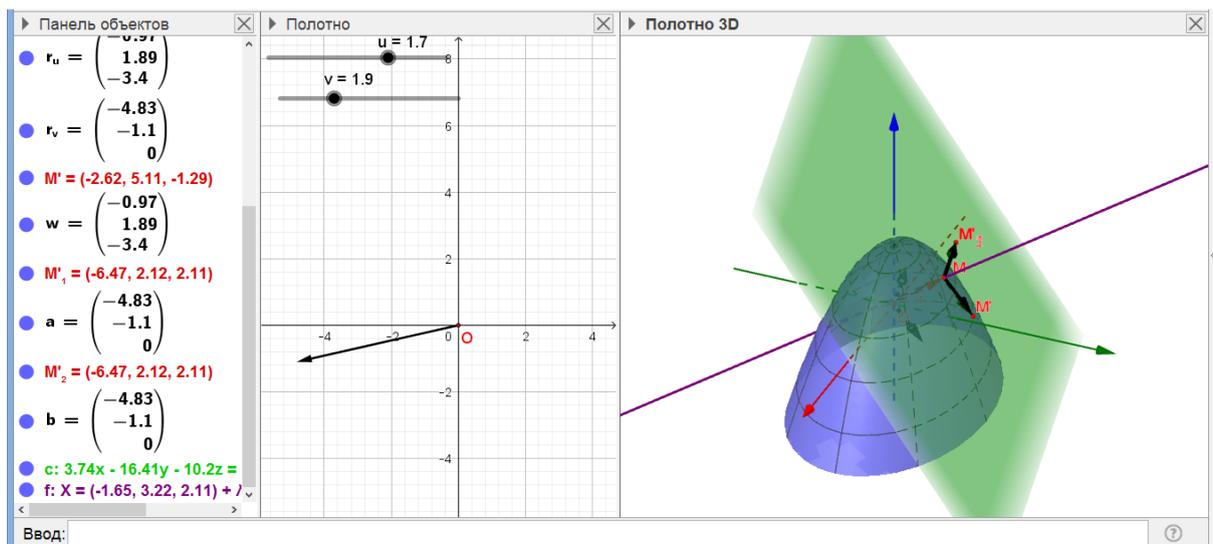


Рис. 14. Изображение касательной плоскости поверхности в ее текущей точке  $M$

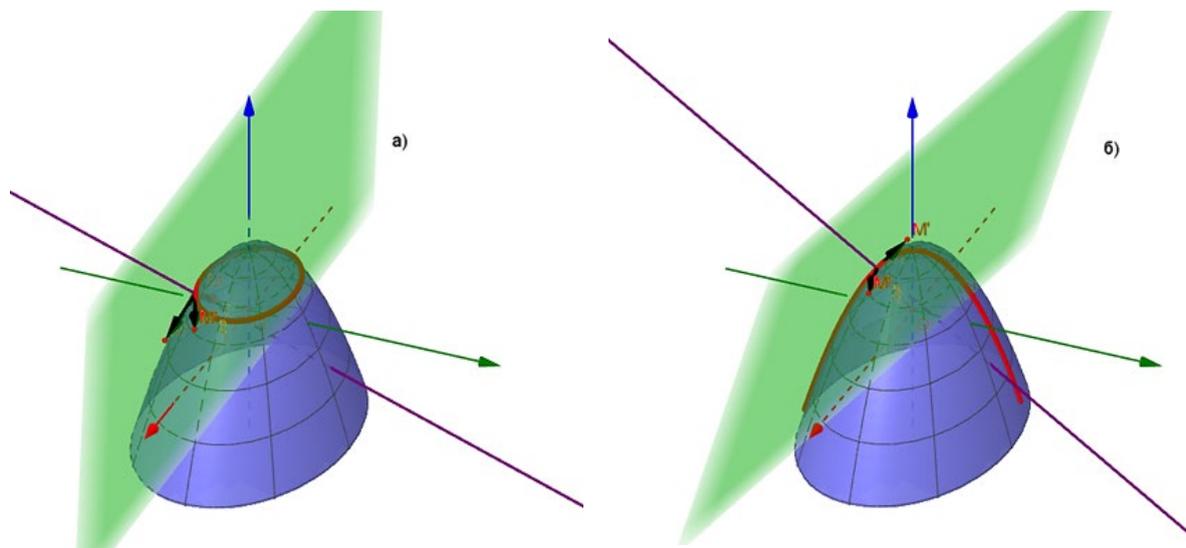


Рис. 15. Перемещение касательной плоскости и нормали вдоль координатных линий

В строке *Алгебра* каталога *Математические операции* имеется команда *Векторное Произведение*. Используя эту команду, можно найти нормальный вектор  $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$  поверхности в точке  $M$  (на рисунке 16 вектор  $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$  обозначен буквой  $d$ ). Отложив от точки  $M$  вектор  $\overrightarrow{MM'_3}$ , равный найденному вектору  $d$ , строим сопровождающий репер поверхности.

**3. Линии на поверхности.** Пусть поверхность  $F$  задана векторным параметрическим уравнением  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ , а лежащая на ней кривая  $\gamma$  параметризована с помощью параметра  $t$ . Тогда криволинейные координаты  $u, v$  точек, расположенных на кривой  $\gamma$ , являются функциями параметра  $t$ :

$$u = u(t), v = v(t). \quad (3)$$

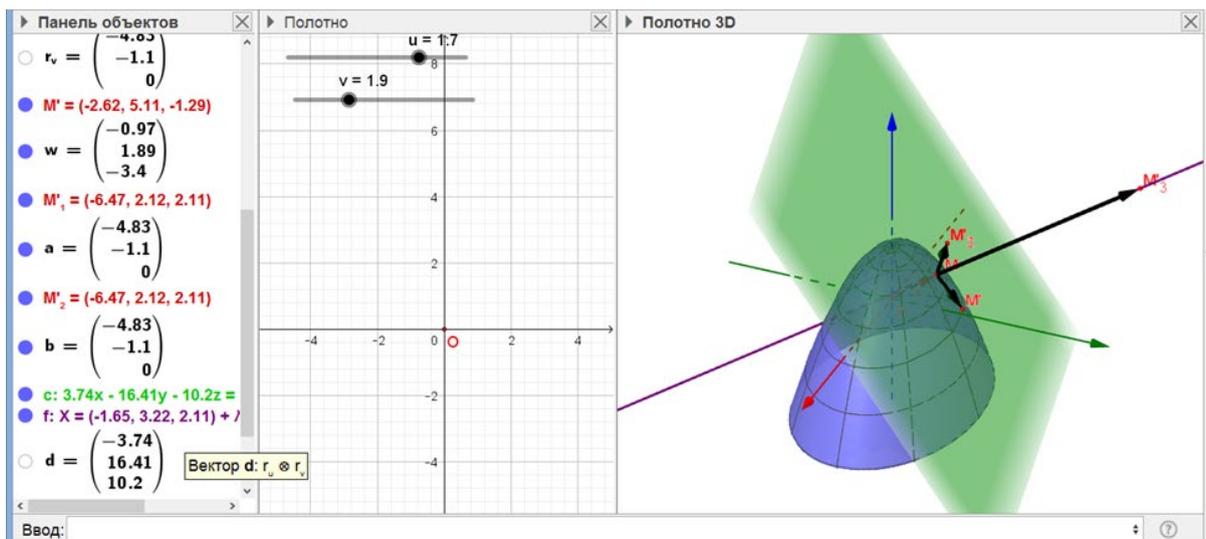


Рис. 16. Сопровождающий репер поверхности

Соотношения (3) называются внутренними уравнениями линии  $\gamma$  на поверхности  $F$ . Подстановка (3) в параметрическое уравнение поверхности приводит к уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)),$$

которое является параметрическим уравнением кривой  $\gamma$ .

Переход от внутренних уравнений линии к ее параметрическому заданию позволяет строить эту линию с помощью команды *Кривая* [11]. Подобным образом на рисунке 17,а построена линия  $v = u^3$  на поверхности эллиптического цилиндра  $r(u, v) = (4 \cos u, 5 \sin u, v)$ , а на рисунке 17,б — линия  $u = v$  на псевдосфере  $r(u, v) = (10 \sin u \cos v, 10 \sin u \sin v, 10 (\ln(\operatorname{tg} \frac{u}{2}) + \cos u))$ .

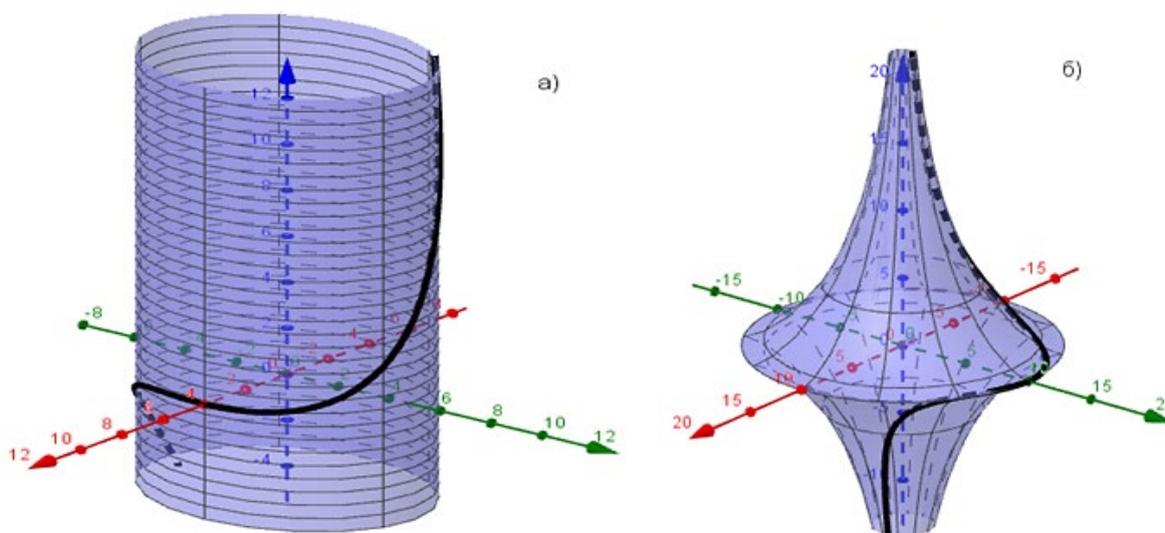


Рис. 17. Линии на поверхности

Одновременное использование команд *Поверхность* и *Кривая* позволяет оперативно создавать наглядные качественные чертежи в тех случаях, когда традиционный «руч-

ной» способ их построения требует существенных временных затрат. Примеры изображений, созданных указанным способом, представлены на рисунках 18. На рисунке 18,а показано изображение локсодромы

$$\vec{r}(t) = \left( \frac{5 \cos t}{\operatorname{ch} \frac{t}{3}}, \frac{5 \sin t}{\operatorname{ch} \frac{t}{3}}, 5 \operatorname{th} \frac{t}{3} \right)$$

сферы  $\vec{a}(u, v) = (5 \cos u \cos v, 5 \sin u \cos v, 5 \sin v)$  (линии, пересекающей меридианы сферы под постоянным углом). На рисунке 18,б дан пример периодической обмотки

$$\vec{r}(t) = ((3 + \cos 6t) \cos t, (3 + \cos 6t) \sin t, \sin 6t)$$

тора  $\vec{a}(u, v) = ((3 + \cos u) \cos v, (3 + \cos u) \sin v, \sin u)$ , которая 6 раз пересекает каждую параллель и один раз каждый меридиан.

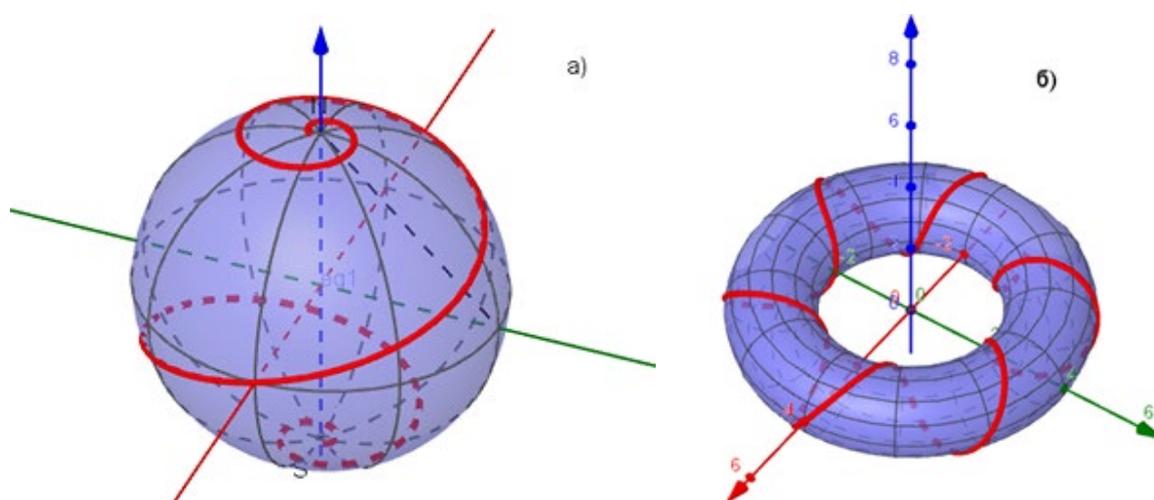


Рис. 18. Изображения, выполненные с помощью одновременного использования команд *Кривая* и *Поверхность*

Задавая рассмотренные кривые путем анимации определяющего их параметра, можно создавать динамические модели, демонстрирующие процесс наматывания этих кривых на соответствующие поверхности. Наконец, одновременное использование команд *Поверхность* и *Кривая* можно эффективно применять для «визуальной проверки» полученных результатов при решении задач, в которых требуется найти уравнение какой-либо линии на заданной поверхности.

При изображении на поверхности однопараметрического семейства линий дополнительно создается ползунок для параметра семейства. На рисунке 19,б изображено семейство линий  $u + v = c$ , зависящее от параметра  $c$ , расположенное на сфере  $\vec{a}(u, v) = (6 \cos u \cos v, 6 \sin u \cos v, 6 \sin v)$ . По рисунку 19,а можно заключить, что линиями этого семейства являются кривые Вивиани. При конструировании соответствующей динамической модели был создан ползунок для параметра  $c$ , а уравнение кривых семейства приведено к виду

$$\vec{a}(t) = (6 \cos t \cos(c - t), 6 \sin t \cos(c - t), 6 \sin(c - t)).$$

При этом выбран дискретный сценарий анимации параметра  $c$  (указан *Шаг* изменения параметра).

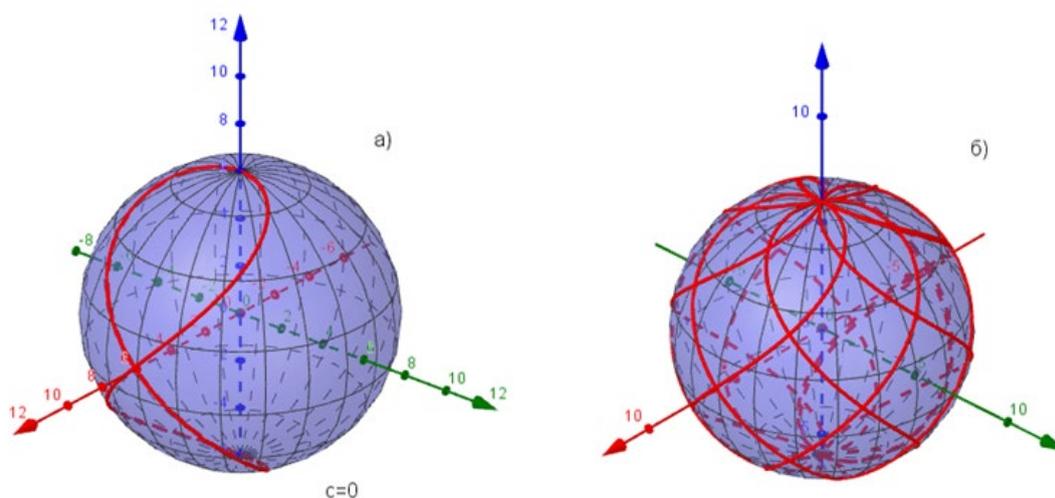


Рис. 19. Изображение семейства линий на сфере

Рисунок 20 демонстрирует семейство линий  $\sqrt{2} \ln u - v = c$  на конусе вращения  $\vec{a}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ , делящих пополам угол между координатными линиями.

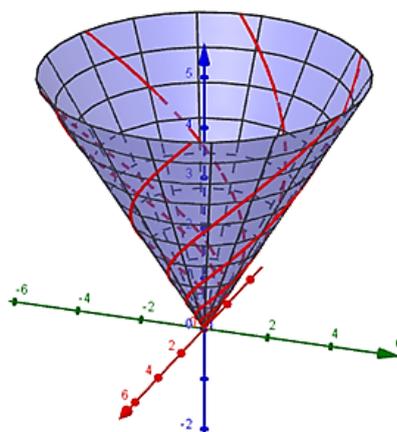


Рис. 20. Семейство линий, делящих пополам угол между  $u$ -линиями и  $v$ -линиями

Если при исследовании линий на поверхностях переходить к их параметрическому заданию, то с помощью аналитического модуля системы GeoGebra можно находить длину линий на поверхности, вычислять углы между линиями.

При обучении же внутренней геометрии поверхностей недостаточная представленность в системе GeoGebra алгоритмов дифференцирования и интегрирования делает ее использование малоэффективным. При этом, однако, создавать некоторые достаточно качественные наглядные электронные демонстрации по-прежнему удается. Можно, например, строить чертежи, демонстрирующие различные типы точек поверхности, применительно к конкретным поверхностям создавать динамические модели, иллюстрирующие теорему Менье, и пр.

Таким образом, применение ИМС GeoGebra при обучении дифференциальной геометрии поверхностей сводится главным образом к созданию наглядного сопровождения

этого раздела курса. Поэтому преподавателю, нацеленному на дальнейшую цифровизацию преподавания теории поверхностей, можно рекомендовать для достижения этой цели использовать в обучении системы компьютерной математики (см., напр., [6; 8; 10]).

В целом анализ, выполненный в статье [11] и в данной работе, позволяет утверждать, что применение интерактивной математической системы GeoGebra в обучении будущих учителей математики дифференциальной геометрии поможет существенно интенсифицировать учебный процесс, качественно преобразовать его наглядное сопровождение, ввести новые формы самостоятельной работы студентов, обогатить тематику курсовых и выпускных квалификационных работ.

В цифровую эпоху свободное владение приемами работы в системах компьютерной математики и в интерактивных математических системах становится важной профессиональной компетенцией учителя математики. Базовые навыки работы в этих системах должны быть заложены у будущих учителей математики еще в период вузовского обучения. Как отмечалось в [11], пока названные системы преимущественно изучаются в рамках факультативных курсов и курсов по выбору. Вместе с тем, как показано на примере дифференциальной геометрии, даже интерактивные математические системы, ориентированные на электронное сопровождение школьного курса математики, можно весьма эффективно применять и в преподавании базовых математических дисциплин. Считаю, что каждый вузовский преподаватель математики может и должен регулярно и методически продуманно внедрять новые средства математической деятельности в процесс обучения своей дисциплине. Это обеспечит формирование у студентов не только навыков работы с математическими системами, но и мотивов к применению этих систем в своей будущей профессиональной деятельности.

*Автор выражает глубокую благодарность профессору А. В. Ястребову за полезные дискуссии во время выполнения представленной работы и за ценные замечания к первоначальному варианту текста данной статьи.*

#### Список использованной литературы

1. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов : в 2 ч. Ч. 2. М. : Просвещение, 1987. 352 с.
2. Атанасян Л. С., Васильева М. В., Вересова Е. Е. [и др.]. Сборник задач по геометрии : учеб. пособие для студ. физ.-мат. фак. пед. ин-тов. М. : Просвещение, 1980. 238 с.
3. Атанасян С. Л., Шевелева Н. В., Покровский В. Г. Сборник задач по геометрии : в 2 ч. Ч. 2. М. : Эксмо, 2008. 320 с.
4. Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П. [и др.]. Сборник задач по геометрии / под ред. В. Т. Базылева. М. : Просвещение, 1980. 238 с.
5. Белько И. В., Ведерников В. И., Воднев В. Т. [и др.]. Сборник задач по дифференциальной геометрии / под ред. А. С. Феденко. М. : Мир, 1981. 279 с.
6. Букушева А. В. Исследование кривых и поверхностей в системе Mathematica : учеб. пособие. Саратов, 2014. 55 с.
7. Гусева Н. И., Денисова Н. С., Тесля О. Ю. Сборник задач по геометрии : учеб. пособие : в 2 ч. Ч. 2. М. : КноРус, 2018. 528 с.
8. Игнатъев Ю. Г., Самигуллина А. Р. Создание библиотеки процедур в дифференциальной геометрии // Международная научно-практическая конференция ИТО Поволжье 2007. Российский научный се-

минар «Методы информационных технологий, математического моделирования и компьютерной математики в фундаментальных и прикладных научных исследованиях»: материалы конф. и тр. семинара. Казань: Татарский гос. гуманитар.-пед. ун-т: Фолианть, 2007. С. 112—116.

9. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1. М.; Л.: ОГИЗ, 1947. 512 с.

10. Капустина Т. В. Программирование опорных задач теории поверхностей в среде Mathematica // Международная научно-практическая конференция ИТО Поволжье 2007. Российский научный семинар «Методы информационных технологий, математического моделирования и компьютерной математики в фундаментальных и прикладных научных исследованиях»: материалы конф. и тр. семинара. Казань: Татарский гос. гуманитар.-пед. ун-т: Фолианть, 2007. С. 381—386.

11. Клековкин Г. А. Использование интерактивной математической системы GeoGebra при обучении дифференциальной геометрии. Параметризованные кривые [Электронный ресурс] // Вестник Оренбургского государственного педагогического университета. Электронный научный журнал. 2019. № 4 (32). С. 257—284. URL: [http://vestospu.ru/archive/2019/articles/19\\_32\\_2019.pdf](http://vestospu.ru/archive/2019/articles/19_32_2019.pdf). DOI: 10.32516/2303-9922.2019.32.19.

12. Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1958. 244 с.

13. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М.: URSS, 2014. 432 с.

14. Розендорн Э. Р. Задачи по дифференциальной геометрии. М.: Физматлит, 2001. 352 с.

15. GeoGebra. URL: <http://www.geogebra.org> (дата обращения 09.07.2019).

Поступила в редакцию 28.08.2019

*Клековкин Геннадий Анатольевич*, кандидат физико-математических наук, доцент  
Самарский филиал Московского городского педагогического университета  
Российская Федерация, 443081, г. Самара, ул. Стара Загора, 76  
E-mail: [klekovkin\\_ga@mail.ru](mailto:klekovkin_ga@mail.ru)

UDC 372.851

G. A. Klekovkin

### Using the GeoGebra Interactive Math System in teaching differential geometry. Parameterized surfaces

The author continues to study the tools of the GeoGebra Interactive Math System, which may be in demand in teaching differential geometry to future mathematics teachers. Based on the analysis, the possible directions of introducing this system into the educational process when studying surfaces and their properties are highlighted. The article is addressed to teachers of the geometry course.

**Key words:** GeoGebra Interactive Math System, differential geometry, parameterized surface, teaching geometry.

*Klekovkin Gennady Anatolyevich*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor  
Samara branch of Moscow City Pedagogical University  
Russian Federation, 443081, Samara, ul. Stara Zagora, 76  
E-mail: [klekovkin\\_ga@mail.ru](mailto:klekovkin_ga@mail.ru)

References

1. Atanasyan L. S., Bazylev V. T. *Geometriya: ucheb. posobie dlya studentov fiz.-mat. fak. ped. in-tov: v 2 ch.* [Geometry. A textbook for students of physics and mathematics at pedagogical institutes. In 2 parts]. Part 2. Moscow, Prosveshchenie Publ., 1987. 352 p. (In Russian)
2. Atanasyan L. S., Vasil'eva M. V., Veresova E. E. et al. *Sbornik zadach po geometrii: ucheb. posobie dlya stud. fiz.-mat. fak. ped. in-tov* [Collection of tasks in geometry. A textbook for students of physics and mathematics at pedagogical institutes]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 1980. 238 p. (In Russian)
3. Atanasyan S. L., Sheveleva N. V., Pokrovskii V. G. *Sbornik zadach po geometrii: v 2 ch. Ch. 2* [Collection of tasks in geometry. In 2 parts. Part 2]. Moscow, Eksmo Publ., 2008. 320 p. (In Russian)
4. Bazylev V. T., Dunichev K. I., Ivanitskaya V. P. et al. *Sbornik zadach po geometrii* [Collection of tasks in geometry]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 1980. 238 p. (In Russian)
5. Bel'ko I. V., Vedernikov V. I., Vodnev V. T. et al. *Sbornik zadach po differentsial'noi geometrii* [Collection of tasks in differential geometry]. Moscow, Mir Publ., 1981. 279 p. (In Russian)
6. Bukusheva A. V. *Issledovanie krivykh i poverkhnostei v sisteme Mathematica: ucheb. posobie* [Study of curves and surfaces in the system "Mathematics". Textbook]. Saratov, 2014. 55 p. (In Russian)
7. Guseva N. I., Denisova N. S., Teslya O. Yu. *Sbornik zadach po geometrii: ucheb. posobie: v 2 ch. Ch. 2* [Collection of tasks in geometry. Textbook. In 2 parts. Part 2]. Moscow, KnoRus Publ., 2018. 528 p. (In Russian)
8. Ignat'ev Yu. G., Samigullina A. R. *Sozdanie biblioteki protsedur v differentsial'noi geometrii* [Creating a library of procedures in differential geometry]. *Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya ITO Povolzh'e 2007. Rossiiskii nauchnyi seminar "Metody informatsionnykh tekhnologii, matematicheskogo modelirovaniya i komp'yuternoii matematiki v fundamental'nykh i prikladnykh nauchnykh issledovaniyakh": materialy konf. i tr. seminara* [International Scientific and Practical Conference ITO Volga 2007. Russian scientific seminar "Methods of information technology, mathematical modeling and computer mathematics in fundamental and applied research". Proceedings of the conference and seminar]. Kazan, Tatarskii gos. gumanit.-ped. un-t, Foliant Publ., 2007, pp. 112—116. (In Russian)
9. Kagan V. F. *Osnovy teorii poverkhnostei v tenzornom izlozhenii. Ch. 1* [Fundamentals of surface theory in tensor presentation. Part 1]. Moscow, Leningrad, OGIZ Publ., 1947. 512 p. (In Russian)
10. Kapustina T. V. *Programmirovaniye opornykh zadach teorii poverkhnostei v srede Mathematica* [Programming support problems of surface theory in Mathematics]. *Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya ITO Povolzh'e 2007. Rossiiskii nauchnyi seminar "Metody informatsionnykh tekhnologii, matematicheskogo modelirovaniya i komp'yuternoii matematiki v fundamental'nykh i prikladnykh nauchnykh issledovaniyakh": materialy konf. i tr. seminara* [International Scientific and Practical Conference ITO Volga 2007. Russian scientific seminar "Methods of information technology, mathematical modeling and computer mathematics in fundamental and applied research". Proceedings of the conference and seminar]. Kazan, Tatarskii gos. gumanit.-ped. un-t, Foliant Publ., 2007, pp. 381—386. (In Russian)
11. Klekovkin G. A. *Ispol'zovanie interaktivnoi matematicheskoi sistemy GeoGebra pri obuchenii differentsial'noi geometrii. Parametrizovannye krivye* [Using the GeoGebra interactive mathematical system in teaching differential geometry. Spatial curves]. *Vestnik Orenburgskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. Elektronnyi nauchnyi zhurnal — Vestnik of Orenburg State Pedagogical University. Electronic Scientific Journal*, 2019, no. 4 (32), pp. 257—284. Available at: [http://vestospu.ru/archive/2019/articles/19\\_32\\_2019.pdf](http://vestospu.ru/archive/2019/articles/19_32_2019.pdf). DOI: 10.32516/2303-9922.2019.32.19. (In Russian)
12. Norden A. P. *Kratkii kurs differentsial'noi geometrii* [Short course of differential geometry]. 2<sup>nd</sup> ed. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1958. 244 p. (In Russian)
13. Rashevskii P. K. *Kurs differentsial'noi geometrii* [Course in differential geometry]. Moscow, URSS Publ., 2014. 432 p. (In Russian)
14. Rozendorn E. R. *Zadachi po differentsial'noi geometrii* [Tasks in differential geometry]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 352 p. (In Russian)
15. GeoGebra. Available at: <http://www.geogebra.org>. Accessed: 09.07.2019.